A TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV - UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

DEMÉTRIO ALONSO RIBEIRO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTA DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUESITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESSICO DE CIDADA (M.Sc.)

Aprovaca

dezembro de 1967

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Carlos J. Távora pela dedicação que demonstrou durante a elaboração do presente trabalho.

Aos amigos, colegas e funcionários da COPPE pelo apoio que sempre manifestaram.

A Elisa pela datilografia.

SUMÁRIO

No capítulo I estão expostos os conceitos fundamentais relativos ao método direto de Liapunov, bem como estão enunciados os principais teoremas referentes ao mesmo.

No capítulo II é feita a correspondência "conjunto de matrizes 2 x 2 reais simétricas — espaço euclidiano tridimensional" que permitirá, no capítulo III, a definição do "cone das formas quadráticas de Liapunov associadas a um sistema linear", com o qual enunciaremos os teore mas do capítulo I em uma linguagem geométrica.

O capítulo IV contém algumas aplicações desta linguagem à exposição e solução de algumas questões particulares.

Os apêndices ao corpo do trabalho são dois:

Apêndice I - em que estão reproduzidos e discutidos os programas do computador IBM 1130 usados para o estudo da "flexibilidade na escolha de uma forma quadrática de Liapunov."

Apêndice II - em que é demonstrado um teorema de geometria, correspondente a um dos teoremas de Liapunov.

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1.1 - NOTAÇÃO:

No que segue, os vetores serão representados por letras latinas minúsculas sublinhadas, as matrizes quadradas por letras latinas maiúsculas sublinhadas, os conjuntos de vetores ou de matrizes por letras latinas maiúsculas manuscritas, os operadores por letras latinas maiúsculas manuscritas sublinhadas e os subconjuntos do espaço euclidiano tridimensional por letras gregas maiúsculas.

Nas equações da geometria analítica, procuraremos, sempre que possível, seguir a notação de Bell*.

1.2 - ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO TRIVIAL DE UM SISTEMA DE EQUA-ÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM AUTÔNOMO:

O sistema a ser estudado é do tipo:

$$\underline{x} = \underline{f}(\underline{x})$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \tag{1.1}$$

$$\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$$

onde $\underline{f(x)}$ satisfaz as condições de Cauchy-Lipschitz**, garantindo a existência e a unicidade das soluções de (1.1).

A cada \underline{x}_0 corresponde um ponto no espaço euclidiano n-dimensional \underline{E}_n (espaço de estado) e a cada solução $\underline{x}(t;\underline{x}_0,t_0)$ do sistema (1.1)

corresponde uma curva parametrizada cujos pontos têm coordenadas

$$x_k = x_k(t, \underline{x}_0, t_0)$$
 k=1,2...n

chamada trajetória de (1.1).

Quando as coordenadas $x_k(t, \underline{x}_0, t_0)$ forem definidas apenas para $t \geqslant t_0$ a curva correspondente será chamada semi-trajetória.

Quando x_k = cte., k=1, 2 ... n, para qualquer t, a curva fica reduzida a um ponto e recebe o nome de <u>singularidade</u> ou <u>ponto de equilibrio</u>.

A solução trivial de (1.1) é dita <u>estável no sentido de Liapu</u> nov se para todo ϵ > 0 existir um $\delta(t_0,\epsilon)$ tal que:

$$||\underline{x}_{0}|| < \delta \rightarrow ||\underline{x}(t; \underline{x}_{0}; t_{0})|| < \epsilon$$
 , $t \ge t_{0}$

Se, além disto

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{x}(t; \underline{x}_0, t_0) = \underline{0} \qquad \underline{x}_0 \in \Omega \subset E_n \qquad t > t_0$$

a solução e dita assintôticamente estável e Ω é chamado domínio de atração de \underline{x} = $\underline{0}$.

A solução $\underline{x} = \underline{0}$, de (1.1), é dita <u>completamente instável</u> se existir um $\varepsilon>0$ com a seguinte propriedade: após um intervalo de tempo finito, tôda trajetória $\underline{x}(t;\underline{x}_0,t_0)$ atinge a hiperesfera $||\underline{x}||=\varepsilon$ para $0<||\underline{x}_0||<\varepsilon$ $(\underline{x}(t_1;\underline{x}_0,t_0)=\varepsilon$ para algum $t_1\geq t_0$)

1.3 - FUNÇÕES DEFINIDAS:

Diremos que uma função $V(\underline{x}) \in C_1$ é definida positiva (negativa) quando:

* [2] , pg. 9

i)
$$V(\underline{x}) > 0$$
 (< 0) $\underline{x} \neq 0$

$$ii)V(\underline{x}) = 0$$
 $\underline{x} = \underline{0}$

De uma forma análoga, quando

i)
$$V(\underline{x}) \ge 0 (40) \underline{x} \neq \underline{0}$$

ii)
$$V(\underline{x}) = 0$$
 $\underline{x} = \underline{0}$

dizemos que V(x) é semi-definida positiva (negativa)

1.4 - MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

1.4-1) Teorema (Liapunov)*

Dado o sistema (l.1), se existir uma função $V(\underline{x})$ definida positiva (negativa) tal que

i)
$$\frac{dV}{dt} = \langle \text{grad } V, \underline{f}(\underline{x}) \rangle$$
 seja definida negativa (positiva)

ii)
$$\lim_{|\underline{x}| \to \infty} V(\underline{x}) = + \infty (-\infty)$$

então a solução trivial de (1.1) é assintôticamente estável e seu domínio de atração é todo o espaço \mathbf{E}_n

Dado o sistema linear

$$\frac{\cdot}{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{1.2}$$

se (1.2) fôr assintòticamente estável, então a cada forma quadrática

n n

$$\sum \sum g_{ij}x_{i}x_{j} = \langle \underline{x}, \underline{G} \underline{x} \rangle$$
,

definida positiva (negativa) corresponde outra forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{K} \underline{x} \rangle$ definida positiva (negativa), tal que

$$\underline{\mathbf{A}'\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{K}} \ \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{G}} \tag{1.3}$$

1.4-3) <u>Teorema</u> (Liapunov)

Dado o sistema (1.1), se existir uma função $V(\underline{x})$ definida positiva (negativa) tal que

i)
$$\underline{dV} = \langle \text{grad } V, \underline{f}(\underline{x}) \rangle$$

 dt

ii)
$$\lim V(x) = + \infty (-\infty)$$

$$\left| \left| \underline{x} \right| \right| \rightarrow \infty$$

então x = 0 é completamente instável.

Dado o sistema (1.2), se o mesmo for completamente instável (ou, o que é equivalente, se os autovetores de A tiverem parte real positiva), a cada forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{G} \underline{x} \rangle$ definida positiva (negativa) corresponde uma outra forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{K} \underline{x} \rangle$ definida negativa (positiva), tal que

$$\underline{\mathbf{A}'}\underline{\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{K}} \ \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{G}}$$

*[1]pg. 262, 2 pg. 19

**[1]

CAPÍTULO II

O CONE DAS MATRIZES DEFINIDAS

2.1) CONVENÇÕES:

Designaremos por

S₂ o conjunto das matrizes 2 x 2 simétricas

 $S_2^+(S_2^-)$ o conjunto das matrizes 2 x 2 simétricas definidas positivas (negativas)

V₃ o conjunto das matrizes 3 x 1 (matrizes coluna)

D₂ o conjunto das matrizes 2 x 2 diagonais

2.2) PROPOSIÇÃO:

 S_2 é isomorfo a E_3 .

Com efeito, a aplicação bijetora $\underline{\tau}$ que associa a cada

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \epsilon S_2$$

um

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{22} \\ g_{12} \end{bmatrix} \varepsilon V_3$$

é um isomorfismo.

O vetor \underline{g} define, no espaço E_3 , um ponto de coordenadas g_{11}, g_{22}, g_{12} .

Por conseguinte, a cada matriz \underline{G} pode ser associado um ponto

* As matrizes são definidas no Corpo real.

 g_{11} , g_{22} , g_{12} e a cada matriz \underline{K} , definida por (1.3) pode ser associado ou tro ponto k_{11} , k_{22} , k_{12} .

Para maior facilidade de manipulação designaremos as coordenadas g_{11} , g_{22} , $g_{12}(k_{11},\,k_{22},\,k_{12})$ por x, y, z. Desta forma, também manteremos a notação de [6] .

2.3) DEFINIÇÃO DO CONE DAS MATRIZES DEFINIDAS:

2.3-1) Teorema

O conjunto S_2^+ define no E_3 , via τ , o interior de uma das fôlhas de um cone sólido Ξ , a qual simbolizaremos por Ξ^+ . Desta forma, as matrizes G >0 determinam o interior Ξ^+ , de $_0^{\Xi^+}$. Analogamente, o conjunto das matrizes G < 0 determina o interior Ξ^- da outra fôlha.

Com efeito, para que \underline{G} seja semi-definida positiva, $\acute{\mathbf{e}}$ necessário e suficiente que

$$g_{11} \ge 0(g_{22} \ge 0)$$
 (2.1a), (2.1b)*
$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \ge 0$$
 (2.2)

ou no E3

$$x \ge 0 \ (z \ge 0)$$
 (2.3a), (2.3b)
 $xy - z^2 \ge 0$

Para que <u>G</u> seja definida positiva, é necessário e suficien te que

$$x > 0 (y > 0)$$
 (2.5a), (2.5b)

* [5] vol I,pg. 66

$$xy - z^2 > 0$$
 (2.6)

Quando G não for estritamente definida, pelo menos uma das relações (2.3a), (2.3b) ou (2.4) deverá apresentar um sinal de igualdade.

A relação (2.4) define uma quádrica $\vartheta \equiv$, bem como seus pontos interiores, e as relações (2.5a) e (2.5b) definem um quadrante no E_3 .

Podemos classificar a quadrica*, observando que

$$\phi_1(x, y, z) \equiv xy - z^2 \equiv \frac{1}{4} (x + y)^2 - \frac{1}{4} (x - y)^2 - z^2 = 0$$

ou seja, que d = é um cone**.

As retas principais de 3 = são definidas pelos autovetores da matriz

que são

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações das retas são, portanto

$$\gamma_1$$
: x= 0 y = 0
 γ_2 : x= y z = 0
 γ_3 : x=-y z = 0

* [7] , pg. 566

** L7J

*** [6]pg. 212

CAPÍTULO III

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV

3.1) RESTRIÇÕES E COLOCAÇÃO DO PROBLEMA:

Nosso estudo ficará restrito aos sistemas de segunda ordem associados à equação diferencial escalar

$$\dot{\zeta} + \alpha \dot{\zeta} + \beta \dot{\zeta} = 0 \tag{3.1}$$

ou seja, a sistemas do tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\zeta = x_1$$
(3.2)

Pelas seguintes razões:

- a) Somente os sistemas de segunda ordem estão associados, via $\underline{\tau}$, ao espaço euclidiano tridimensional (um sistema de terceira ordem estaria associado ao E_6).
- b) Para as finalidades a que se propõe o presente estudo, a restrição adicional (3.2) não é crítica, levando, além disto, a expressões mais fâ cilmente manipuláveis.

Vimos no capítulo II que a imagem do conjunto $S_2^{\dagger}US_2^{}$, via a transformação $\underline{\tau}$, é o interior $\stackrel{\circ}{=}$ de um cone $\underline{=}$ $\underline{=}$ $\underline{=}$ \underline{U} $\underline{=}$ $\overset{\dagger}{=}$. Por outro · lado, sabemos que a relação (1.3), dentro de certas condições $\overset{\star}{=}$, associa a cada matriz \underline{G} definida positiva (negativa) uma e uma única matriz \underline{K} .

* [2] pg. 26 [10], pg. 81

será definida positiva (negativa) se os autovalores de A tiverem parte real negativa e será definida negativa (positiva) se os autovalores de A tiverem parte real positiva.

Note-se que o espaço E_2 , em que vamos representar os sistemas (3.2), não é da mesma natureza que o espaço que utilizaremos para a representação das matrizes 2×2 simétricas. No entanto a todo ponto do espaço E_2 definido por um vetor \underline{w} εV_2 podemos associar um ponto do E_3 determinado pela matriz $\underline{w} >< \underline{w}$.

Feitas as restrições, a transformação (1.3) assume a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{11} & -g_{12} \\ -g_{12} & -g_{22} \end{bmatrix} (3.5)$$

ou

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{22} \\ g_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\beta \\ 0 & 2\alpha & -2 \\ -1 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix}$$
 (3.6)

cuja inversa é

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} & \frac{\beta}{2} & -1 \\ \frac{1}{2\alpha\beta} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \frac{1}{2\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{22} \\ g_{12} \end{bmatrix}$$
(37)

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{M}}_{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{g}}$$

Examinemos as condições nas quais um autovetor de $\underline{M}_{\underline{A}}$, interior a Ξ^+ , é mapeado em outro vetor interior a Ξ^+ .

Para que isto aconteça é necessário que, além de o autovetor estar contido em = +, o autovalor associado ao mesmo seja positivo. (Se o autovalor associado for negativo, o autovetor será mapeado na outra folha).

i) Estudo dos sinais dos autovalores reais de $\underline{M}_{\underline{A}}$. ($\alpha^2 \ge 4\beta$)

$$\lambda_{1} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\lambda_{2} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta}}{4\beta}$$

$$\lambda_{3} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{4\beta}$$

a) Se $\alpha > 0$ $\beta > 0$ (sistema assintoticamente estável)

$$\lambda_1 > 0$$
 $\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 > 0$

b) Se $\alpha < 0$ $\beta > 0$ (sistema completamente instavel)

$$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad \lambda_3 < 0$$

c) Se $\alpha > 0$ $\beta < 0$

$$\lambda_1 > 0$$
 $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 > 0$

d) Se $\alpha < 0$ $\beta < 0$

$$\lambda_1 < 0$$
 $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 > 0$

ii) Estudo da localização dos autovetores de $\underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$

Os autovetores \underline{x}_1 , \underline{x}_2 , \underline{x}_3 de $\underline{\underline{M}}_{\underline{A}}$, associados respectivamente a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ são

$$\underline{\mathbf{x}}_{1} = \begin{bmatrix} 2\beta \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}}_{2} = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta}) - 2\beta \\ 2 \\ \alpha + \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta} \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}}_{3} = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha - \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta}) - 2\beta \\ 2 \\ \alpha - \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta} \end{bmatrix}$$

Em relação ao cone 3 = :

- a) $\underline{x}_1 \in \Xi$ se $\alpha^2 < 4\beta$ ($\lambda_2 \lambda_3$ complexos conjugados)
- b) Sempre que $\alpha^2 \ge 4\beta$ ($\lambda_2 \lambda_3$ reais)

pois

$$x_{k1} x_{k2} - x_{k3}^2 \equiv 0$$
 (k = 1, 2)

- c) Quando $\alpha^2 = 4\beta$ os vetores \underline{x}_1 \underline{x}_2 \underline{x}_3 são confundidos e pertencem à fronteira de Ξ .
- 3.2) PROPOSIÇÕES RELACIONADAS COM A TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV:

3.2-1) Teorema

O conjunto de matrizes $\underline{K} = \underline{L}_{\underline{A}}(\underline{G})$, onde \underline{A} é fixa e \underline{G} varia em S_2^+ U S_2^- , define o interior \underline{T} de um cone ∂ \underline{T} .

Com efeito, de (2.7) e (3.6) resulta

$$\phi_2(x, y, z) \equiv \phi_1(2\beta z, 2\alpha y - 2z, \beta y + \alpha z - x) \equiv$$

$$\equiv -(x^2 + \beta^2 y^2 + (\alpha^2 + 4\beta)z - 2\beta xy - 2\alpha \beta yz - 2\alpha xz) = 0 \qquad (3.2-1)$$

Como

$$-\phi_{2}(x,y,z) = (x - \beta y - \alpha z)^{2} + 4\beta(z - \alpha y)^{2} - \alpha^{2}\beta^{2}y^{2}$$
 (3.2-2)

aT éum cone.

Apesar de não conhecermos as expressões algébricas dos eixos do cone 3T, podemos estabelecer as seguintes proposições:

3.2-2) Proposição

O cone $\Im T$, definido por (3.2-1) , é tangente ao plano z=0 , quaisquer que sejam α , β finitos e não nulos.

Com efeito, fazendo z = 0, em (3.2-1), obtemos a equação

$$x = \beta y$$

da geratriz na qual ∂T é tangente a z = 0.

Quando $\beta > 0$ esta geratriz é interior a Ξ , e quando $\beta < 0$, não.

3.2-3) <u>Teorema</u>

Quando $\alpha^2 > 4\beta(\lambda_2, \lambda_3 \text{ reais})$ os cones ∂T e $\partial \Xi$ são tangentes, e as geratrizes comuns são os autovetores de \underline{M}_A .

Quando $\alpha^2 < 4\beta$, os cones .0T e 0= não têm geratriz comum. A demonstração está no apêndice II.

* [7] pg. 566

3.2-4) Corolário

Quando $\beta < 0$, o interior de Ξ e o interior de T não tem nenhum ponto comum.

No caso de ß ser positivo, temos três possibilidades:

- a) $\alpha > 0$ e neste caso, a fôlha Ξ^{+} é mapeada num subconjunto de Ξ^{+}
- b) α < 0, e neste caso, a fôlha = té mapeada num subconjunto de = t
- c) $\alpha = 0$. Êste caso será examinado no cap. IV

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

4.1) EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LIAPUNOV:

A equação

$$\underline{\mathbf{A}^{\mathsf{t}}\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{K}} \ \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{G}}$$

tem uma e, uma única solução, se a soma de dois autovalores distintos ou não de \underline{A} for diferente de zero.

Qual o significado geométrico desta condição ? Ou melhor, qual o significado geométrico do não cumprimento desta condição ?

No caso em estudo, os autovalores de A são:

$$\lambda_{1} = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta} \right)$$

$$\lambda_{2} = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^{2} - 4\beta} \right)$$

Vemos que $\lambda_{i} + \lambda_{j} = 0$ i, j = 1, 2

somente quando $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Mostraremos que, neste caso, o cone 3 T <u>degenera.</u>
Com efeito

a) Quando $\alpha = 0$ a equação (32-1) assume a forma

$$(x - \beta y)^2 + 4\beta z^2 = 0$$

Se $\beta > 0$ (3:.2-2) representa a reta

$$x = \beta y$$
 $z = 0$

Se β < 0 (3.2-2 representa os dois planos)

$$x - \beta y + 2 \sqrt{-\beta} \quad z' = 0$$

е

$$x - \beta y - 2\sqrt{-\beta} z = 0$$

b) Quando $\beta = 0$ a equação (3.2-1) assume a forma

$$x - \alpha z = 0$$

O cone também degenera se

a) $\alpha = \infty$

Com efeito, dividindo ambos os membros de (3.2-1) por α^2 e fazendo $\alpha \to \infty$, temos

$$z = 0$$

b) β = ∞

Dividindo (3.2-1) por β^2 e fazendo $\beta \rightarrow \infty$ temos

y = 0

Vemos, portanto que nos casos acima o interior do cone ≡ é mapeado no conjunto vazio.

4.2) ESTUDO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV DO TIPO "FORMA QUADRÁTI-CA" ASSOCIADAS A UM SISTEMA REGULADOR LINEAR:

O sistema a ser estudado é o apresentado na figura 4.1

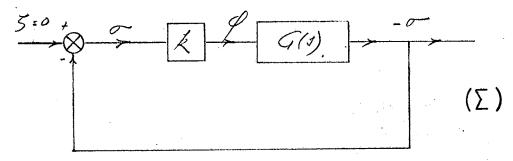


Fig. 4.1

onde

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + \alpha S + \beta}$$

ε admite uma representação no espaço de estado

$$\frac{x}{x} = \underline{A} \underline{x}$$

onde

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{\beta} & -\mathbf{\alpha} \end{bmatrix} + \mathbf{k} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros α e β + k definem uma família de cones $\Im T$ $(\alpha,\;\beta+k)$

Se fixarmos $\alpha=\alpha_0$, teremos uma família de cones $\partial T(\alpha_0,\beta+k)$ Analogamente, se fixarmos $\beta+k=\beta_0+k_0$ teremos uma família de cones $\partial T(\alpha,\beta_0+k_0)$.

Sabemos, através dos teoremas de Liapunov, que uma condição su ficiente para que Σ seja assintôticamente estável é que exista uma função de Liapunov representável por uma forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{K} \underline{x} \rangle > 0$, associada a Σ .

Surgem então as seguintes questões:

a) Uma vez fixados α e β , dentro de que limites pode variar k , de maneira a Σ permanecer sempre associado à mesma forma quadrática de Liapunov ?

b) Uma vez fixados β e k, dentro de que limites pode variar α , de maneira a permanecer sempre associado à mesma forma quadrática de Liapunov?

Qual a interpretação geométrica destas limitações ?

4.2-1) Resposta à Questão a)

Cada par de valores α e $\beta+k$ define um conjunto de funções de Liapunov < \underline{x} , \underline{Kx} > associadas a Σ , cada qual, por sua vez determinando um cone , $\partial T(\alpha$, $\beta+k)$ no E_3 .

Se fixarmos α e β e variarmos k, à variação de k corresponderá uma deformação continua de $\partial T(\alpha, \beta + k)$.

Mais especificamente, fazendo $k = k_0$, existe um $k_1(k_2)$ tal que os cones $\partial T(\alpha, \beta + k_1)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k_0)$ ($\partial T(\alpha, \beta + k_2)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k_0)$) são tangentes.

Neste caso, para um k' $_1$ tal que k_1 < $k'_1 \leqslant k_0$ (k'_2 tal que $k_0 \leqslant k'_2 < k_2$) o sistema Σ , para $k'_1 \leqslant k \leqslant k_0 (k_0 \leqslant k \leqslant k'_2$) está associado a uma função de Liapunov, e esta função é determinada por um ponto qualquer da interseção dos interiores de $\partial T(\alpha, \beta + k'_1)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k_0)$ ($\partial T(\alpha, \beta + k_0)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k'_2)$)

Na figura 4.3 temos uma ideia qualitativa do que acontece.

4.2-2) Solução da questão b)

Para um dado valor de (β + k) todos os cones $\partial T(\alpha, \beta$ + k) são tangentes entre si na reta $x = (\beta + k)y$, z = 0 (excetuando-se , naturalmente os casos de degenerescência), conforme ilustrado na fig. 4.4.

Quaisquer que sejam α_1 e α_2 , valores finitos e não nulos de α , existe um ponto comum aos interiores de todos os cones $\partial T(\alpha, \beta + k)$ ($\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$) e portanto, para os mesmos valores de α , uma função de Liapunov,

dada pelo ponto, associada a E .

Na figura 4.4 representamos isto qualitativamente.

Para formar uma idéia quantitativa precisa, mostramos as figuras 4.5 a 4.9 os cones 3T e 3 \equiv seccionados pelo plano $\eta = 1$ e projeta dos sôbre o plano $\eta = 0$ para alguns valores de α e $\beta + k$.

Introduzimos, com a finalidade de obter uma melhor projeção das seções dos cones, uma rotação do sistema de coordenadas, dada por:

$$\xi = \cos \left(tg^{-1} \left(\underline{1} \right) \right) x + \sin \left(tg^{-1} \left(\underline{1} \right) \right) y$$
 $\beta + k$

$$\eta = -\text{sen (tg}^{-1} \left(\begin{array}{c} 1 \end{array} \right) x + \cos \left(\text{tg}^{-1} \left(\begin{array}{c} 1 \end{array} \right) y$$

$$\zeta = z$$

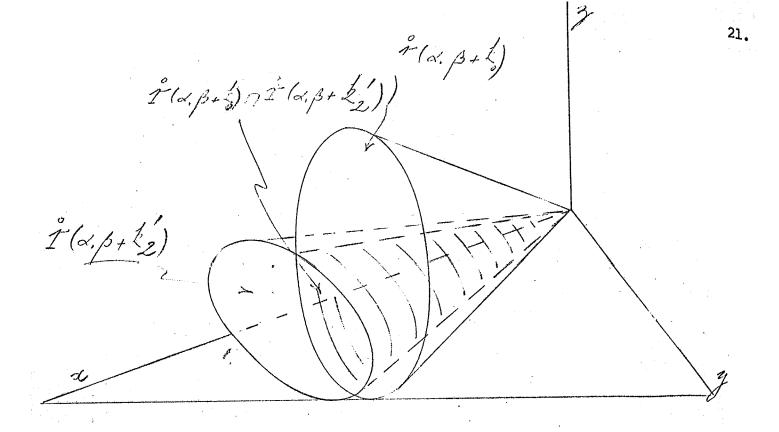


Fig. 4.3

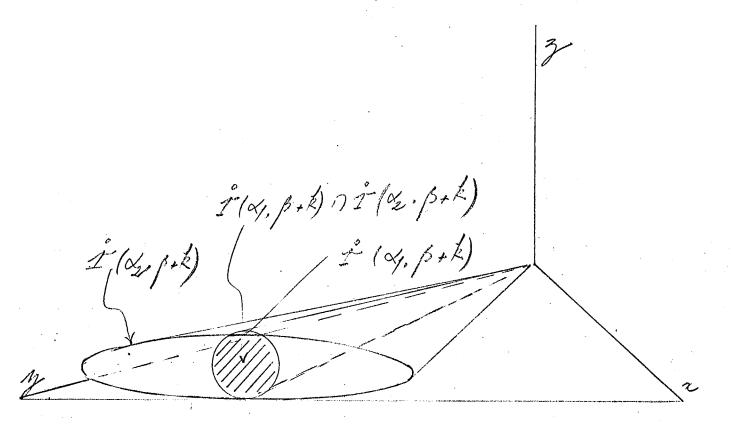


Fig. 4.4

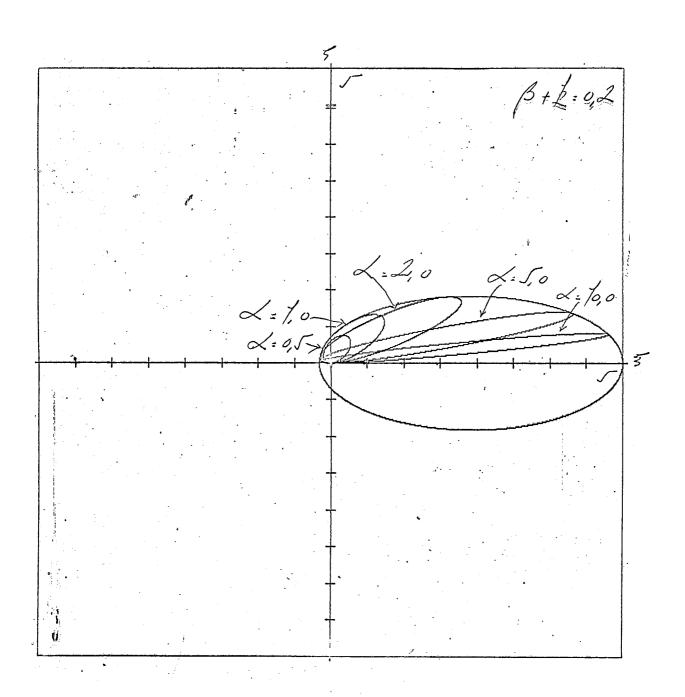


Fig. 4.5

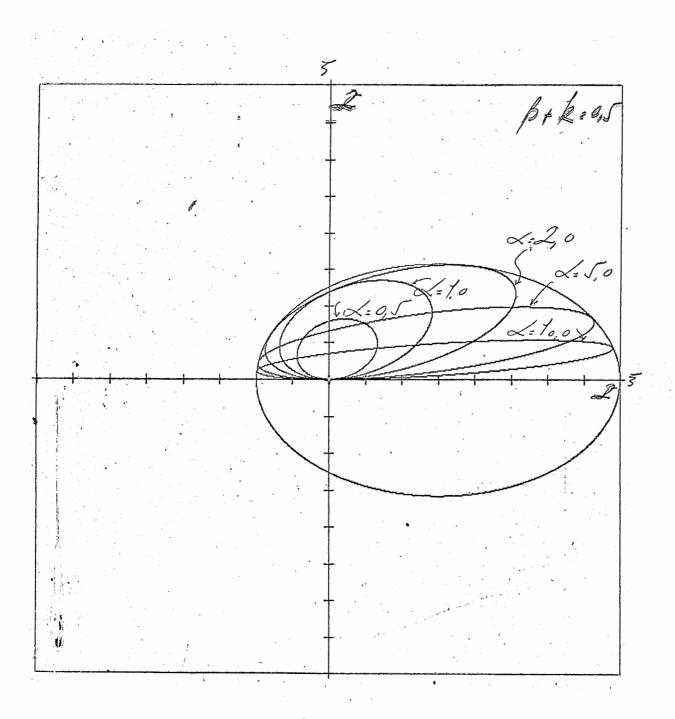


Fig. 4.6

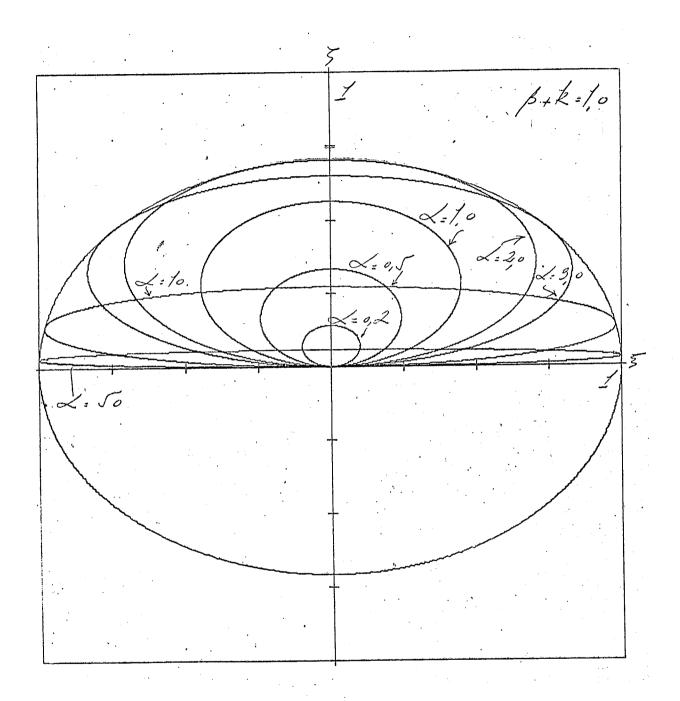


Fig. 4.7

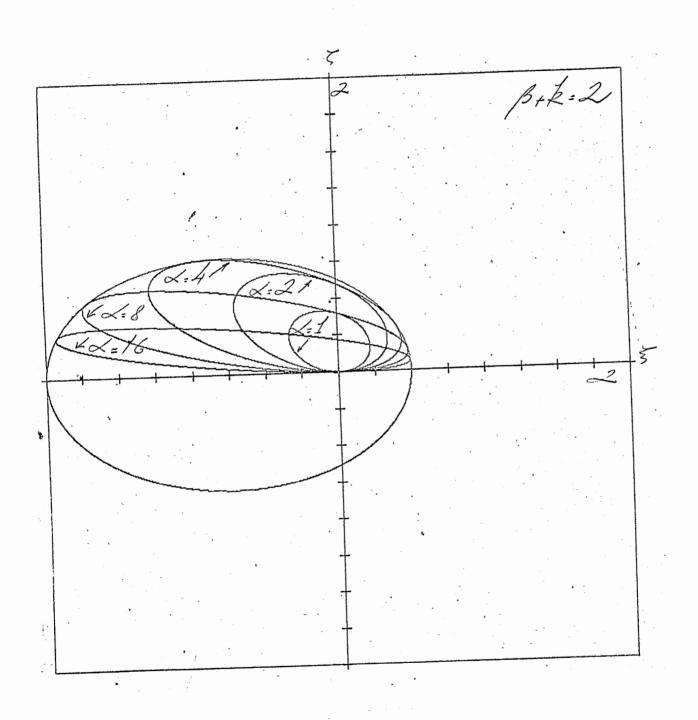


Fig. 4.8

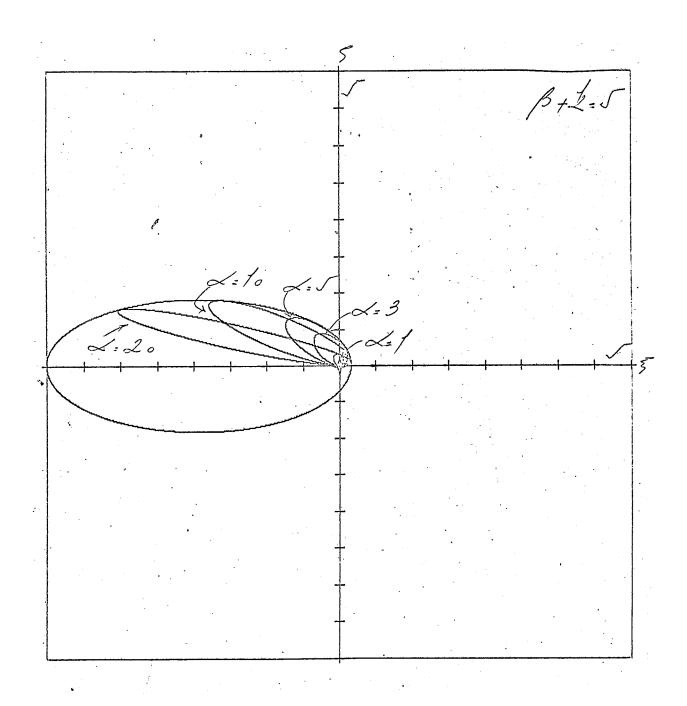


Fig. 4.9

4.3) ESTUDO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV DO TIPO "FORMA QUADRÁTI-CA MAIS INTEGRAL" ASSOCIADAS A UM SISTEMA REGULADOR NÃO LINEAR.

Examinaremos um caso particular do sistema (!), estudado em Aizerman e Gantmacher*.

Os autores demonstram que a função de Liapunov

$$V_1 = \underline{L}_{\underline{A}}(\langle \underline{u}, \underline{x} \rangle) + \overline{\beta} \int_0^{\sigma} \phi (\sigma) d\sigma^{**}$$

cuja derivada é

$$V_1 = -(\sqrt{r}\phi(\sigma) - \langle \underline{u}, \underline{x} \rangle^2 - \tau\phi(\sigma)(\sigma - \underline{\phi}(\sigma))$$

assegura a estabilidade absoluta de (!).

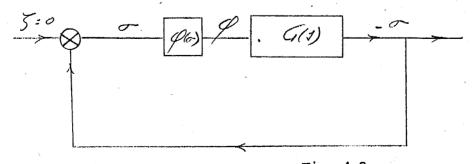
Considerando que:

- a) Em σ = 0 o segundo têrmo de $\,\,V_{1}\,$ se anula
- b) A forma quadrática ($\times \underline{u}$, \underline{x}) não é <u>definida</u> positiva (é apenas semi-definida positiva).

Surge a seguinte pergunta:

Quais as restrições que deve sofrer o vetor \underline{u} para que a função V_1 seja definida ? Qual a interpretação geométrica desta restrição ?

Nosso sistema está representado na figura 4.2



*[3] pg. 153, teorema II

Fig. 4.2

** O vetor u é definido pelos aa no decorrer da demonstração do teorema.

onde

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + \alpha S + \beta} \qquad 0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} < k$$

Neste caso, a função V_1 é

$$V_1 = \underline{L}_{\underline{A}} ((u_1x_1 + u_2x_2)^2) + \overline{\beta} \int_0^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma$$

ou

$$V_1 = \underline{L}_{\underline{A}} < \underline{x}, \underline{M}\underline{x} > + \overline{\beta} \int_0^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma$$

com

$$\underline{M} = \underline{u} > < \underline{u}$$

O conjunto das matrizes \underline{M} define a fronteira de Ξ . Como $\underline{\underline{T}}$ é sempre interior a Ξ , o único caso em que

$$L_{\underline{A}} (< \underline{x}, \underline{Mx} >)$$

poderá ser semi-definida, será quando

$$\begin{bmatrix} 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \\ u_1u_2 \end{bmatrix}$$

for um autovetor de $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{A}}}$.

Neste caso V₁ se anulará na interseção das retas

$$\langle \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle = 0$$
 e $\sigma = \sigma_0, \phi (\sigma_0) = 0$

e V₁ não será uma função de Liapunov.

A coincidência ocorre quando

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) \\ & & \\$$

Como, por outro lado \underline{u}_1 e \underline{u}_2 são ortogonais aos autovetores de \underline{A} , podemos afirmar:

A função V_1 não será uma função de Liapunov quando fôr ortogo nal a um dos autovetores de \underline{A} .

CONCLUSÃO

Procuramos, neste trabalho, traduzir a linguagem do método direto de Liapunov para a linguagem da geometria analítica. O teorema 3.2.3, juntamente com o corolário 3.2.4, são o equivalente aos teoremas 1.4.2 e 1.4.4.

As aplicações do método geométrico, ficaram, de cento modo li mitadas aos exemplos que conseguimos encontrar de aplicações da propria transformação de Liapunov, que foram poucos. Entretanto, o método geométrico permite uma desenvoltura razoável quando se está trabalhando com as formulações do método direto.

Continua aberta a questão de existir algum significado físico para as funções de Liapunov, e o fato de um sistema permitir uma flexibilida de maior na escolha das formas quadráticas associadas, também, aparentemente não leva a nenhuma conclusão quanto ao desempenho do sistema. No entanto, jul gamos interessante incluir os resultados obtidos num apêndice.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Liapunov, A. M. "Probleme générale de la stabilité du mouvement", 1907.
- [2] Hahn, W. -"Theory and application of Liapunov's direct method", Prentice-Hall, 1963.
- [3] Aizerman, e -"Absolute stability of regulator Systems", Holdenday, Gantmacher 1965.
- [4] Ogata, K. -"State Spaceanalysis of Control Systems", Prentice-Hall, 1967.
- [5] Gantmacher, -"Matrix theory", Chelsea, 1964.
- [6] Bell, R. -"Coordinate geometry of three dimensions", McMillan, 1963.
- [7] Papelur, G. "Précis de géometrie analytique", Vuibert, 1930.
- [8] Kalman, R. e

 Bertram, J

 -"Control System Analysis and Design via the Second method of Liapunov", Trans. ASME Série D junho

 1960, pg. 371
- [9] Bellman, R. -"Stability theory of differential equations", McGraw--Hill, 1953.
- [10] La Salle, J e -"Stability by Liapunov's direct method", Academic Press Lefschetz, S. -1961.

APÊNDICE I

UMA FIGURA DE MÉRITO PARA OS SISTEMAS (1.3) - O CONE DE ÂNGULO SÓLIDO MÁXIMO.

Fazendo uma mudança de coordenadas (cartesianas para cilíndricas) a equação de 3T assume a forma

 $sen^2\theta cos^2\theta + \beta^2 sen^2\theta sen^2\theta + (\alpha^2 + 4\beta)cos^2\theta - 2\beta sen^2\theta sen^2\theta cos\phi -$

$$-2\alpha\beta$$
 senθ cosθ senφ -2 αsenθ cosθ cosφ = 0 (1.1)

Esta expressão resultaria ainda mais simples se (2.2-1) esti vesse na forma canônica.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2 = 0$$

caso em que (I-1) assumiria a forma

$$\lambda_1 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{cos}^2 \theta + \lambda_2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta - \lambda_3 \operatorname{cos}^2 \theta = 0$$

donde a expressão para o ângulo sólido máximo

$$\text{Max } \Omega \ (\alpha, \ \beta) \ = \ \underset{\alpha, \beta}{\text{Mi}} \ 2 \left(\ \pi - \ \int_0^\pi \ (\frac{\lambda_1 \cos^2 \phi \ + \lambda_2 \ \sin^2 \phi}{\lambda_1 \cos^2 \phi \ + \lambda_2 \sin^2 \phi - \lambda_3} \right)^{1/2} d\phi)$$

Os valores de α e β para os quais Ω é máximo, que foram encontrados com o auxílio do computador IBM 1130 (ver páginas seguintes), determinam um sistema (3.2) para o qual a escolha de uma função de Liapunov do tipo forma quadrática é "mais flexível".

```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
    FUNCTION FINTA (X)
        COMMON ALAM1, ALAM2, ALAM3
        C=(ALAM1*(COS(X))**2+ALAM2*(SIN(X))**2)
        D=SGRT(C)
        B=SQRT(C-ALAM3)
        FINTA=D/F
        RETURN
        END
FEATURES SUPPORTED
```

ONE WORD INTEGERS

CORT REQUIREMENTS FOR FINTA
COMMON 6 VARIABLES 10 PROGRAM 54

END OF COMPILATION

```
// FCR
*LIST SCURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
     FUNCTION OMEGA(ALFA, BETA)
      EXTERNAL FINTA
      DIMENSION A(6) +R(3,3)
      COMMON ALAM1, ALAM2, ALAM3
     ~A(1)=1.
     A(2) = -BETA
     A(3)=BETA**2
     A(4) = -ALFA
    A(5)=-ALFA*BETA
     A(6)=/LFA**2+4•*BETA
   CALL EIGEN (A,R,3,0)
      CALL ELUD (ALAM1 , A(1))
      CALL ELUD(ALAM2 , A(3))
      CALL ELUD (ALAM3 , A (6))
      PI=3.141592653
      CALL SMPSN(FINTA,0.,PI,0.1E-04,50,SI1,S,N,IER)
      ANGLE = 2 . * (PI-S
      OMEGA = ANCLE
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OMEGA
COMMON 6 MARIABLES 50 PROGRAM. 152

END OF COMPILATION

```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD:1132PRINTER)
      CALCULO DO ANGULO SOLIDO MAXIMO
C
C
     PROGRAMADOR DEMETRIO
                                 COPPE 1967
      EXTERNAL OMEGA
      DIMENSION V(11), VAL(3)
      COMMON ALAM1, ALAM2, ALAM3
      READ(2,1)V
    1 FORMAT(8(1X,F3.1),2X,F10.8,2(1X,F3.1))
      CALL PATSE (OMEGA, V, VAL, 200, KI)
      WRITE(3,3)
      WRITE(3,2) VAL
    3 FORMAT(/////4X'ANGULO SOLIDO MAXIMO')
    2 FORMAT(/////4X'ALFA = 'F7.5/4X'BETA = 'F7.5
     1/4X'OMEGA = 'F7.5)
      CALL EXIT
     END
FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
```

IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR COMMON 6 VARIABLES 30 PROGRAM 108

END OF COMPILATION

ANGULO SOLIDO MAXIMO

ALFA = 2.80000 RETA = 1.00000 OMEGA = 0.59693

APÊNDICE II

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2-3

 $\alpha^2 \ge 4\beta$

Sabemos que, quando $\alpha^2 > 4\beta$ (λ_2 e λ_3 reais), os cones $\beta \equiv$ e $\theta = 1$ têm duas geratrizes comuns. Para provar que os cones são tangentes, provaremos que o plano tangente ao cone $\theta \equiv 1$ numa das geratrizes comuns coincide com o plano tangente a $\theta \equiv 1$, outro cone na mesma geratriz.

Com efeito, a equação do plano tangente a ∂≡ na reta

$$\frac{x}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}) - 2\beta} = \frac{y}{2} = \frac{z}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}$$

é

$$(\frac{\partial \phi_1}{\partial x})$$
 2 + $(\frac{\partial \phi_1}{\partial y})$ y + $(\frac{\partial \phi_1}{\partial z})$ z = 0

onde

$$P_0 = (\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) - 2\beta \quad 2 \quad \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})$$

ou seja

$$2x + (\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) - 2\beta)y - 2(\alpha + \alpha^2 - 4\beta)z = 0$$

(II-1.1)

Analogamente, o plano tangente a 3T na mesma reta é

$$-8\beta x - (4\beta\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) - 8\beta^2)y + 8\beta(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})z = 0$$
 (II-1-2)

A proporcionalidade entre os coeficientes de (II.1-1) e de (II-1.2) mostra-nos que amboa os planos coincidem.

No caso de outra geratriz comum a ∂T e a ∂≡ , a demonstração é análoga.

$$\alpha^2 < 4\beta$$

O cone $\vartheta \equiv$ tem uma geratriz que coincide com o eixo 0x, e outra que coincide com o eixo ϑy . Por sua vez o cone ϑT , para α e β finitos e não nulos, é tangente ao plano z=0 na reta $x=\beta y$. Isto exclui a possibilidade de uma geratriz comúm a $\vartheta \equiv$ e a ϑT no plano z=0.

Seccionando os cones $\vartheta \equiv e \vartheta T$ por um plano paralelo a z=0 (z=1 por exemplo), obtemos as equações de duas cônicas. Os cones terão uma geratriz comum se e somente se as cônicas tiverem algum ponto em comum. Além disto, se as cônicas forem tangentes, os cones também o serão.

A equação da seção de $\theta \equiv \text{pelo plano } z = 1$ é

$$xy = 1 (II.2\pm 1)$$

e a seção de de pelo mesmo plano é

$$x^2 + \beta^2 y^2 - 2\beta xy - 2\alpha x - 2\alpha \beta y + (\alpha^2 + 4\beta) = 0$$
 (II.2-2)

Eliminando entre (II-2.1) e (II-2.2) temos

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta) x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0$$
 (II.2-3)

que, por meio da transformação (de Tschirnhausen)

$$\tilde{x} = x - \frac{\alpha}{2}$$

se reduz a

$$(\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}(2\beta - \alpha^2))^2 = 0$$

As raizes de (II.2-3) são portanto

$$x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

$$x_3 = x_4 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Quando $\alpha^2 \geqslant 4\beta$ os cones são tangentes (como já havía - mos visto em 3.2.3.1).

Quando α^2 < 4β os cones não têm geratriz comum.